შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

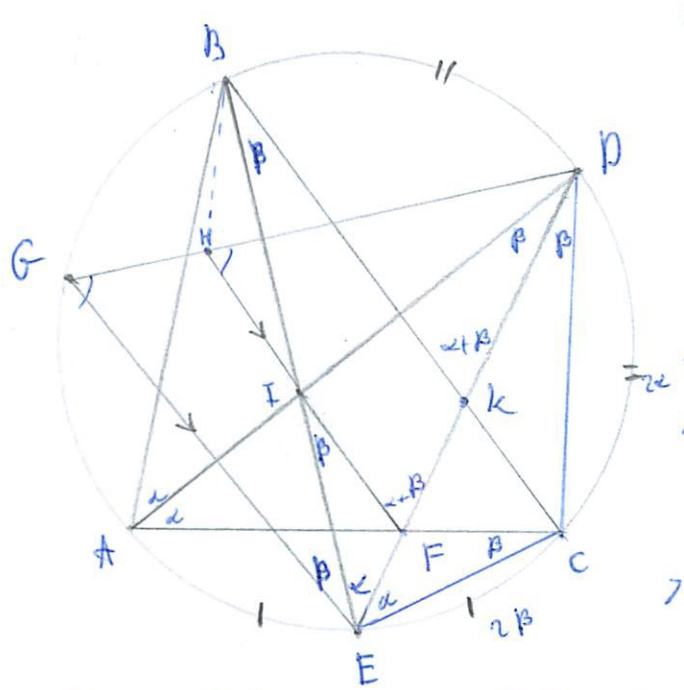
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

25.04.2015/ მათ/III/ 613

ამოცანა № 1

გვერდი № 1(2)



ვთქვათ რომ $\angle BAC = 2\alpha$ და $\angle ABC = 2\beta$

მაშინ ცხადია $\angle EDC = \angle ACE$ ე.ი. $EC^2 = FE \cdot ED$

ახლა დავამტკიცოთ ცნობილი ფაქტი დამტკიცებული $IE = EC$

$\angle ICE = 90 - \alpha$ ხოლო

$\angle EIC = 90 - \alpha$ ე.ი. $IE = EC$ს

ე.ი. $IE^2 = EF \cdot ED$, ე.ი.

$\angle EIF = \beta$

$GE \parallel IF \Rightarrow \angle GEI = \beta$ ასევე ვამოწმებთ, რომ $\angle IFD = \alpha + \beta$. და ვიღებთ IF ანუ $IH \parallel GE$ და $\angle DGE = \alpha + \beta$ ე.ი. $\angle DHF = \alpha + \beta$.

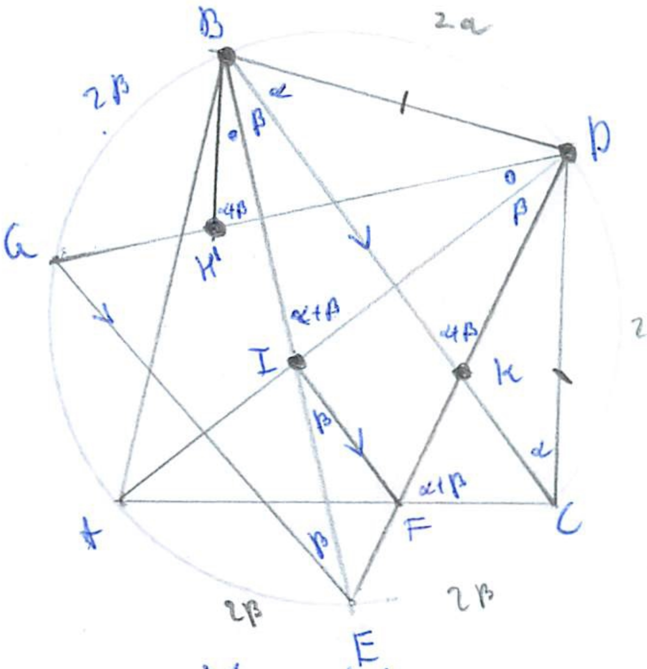
$HD = DF$. ე.ი. თუ ვაჩვენებთ, რომ დავამტკიცებთ HB-ს მხებობას, მაშინ დავამტკიცოთ, რომ $\angle BHD = \angle HFD$ ხოლო $\angle HFD = \alpha + \beta$. K წერტილი იყოს BC-ს და DF-ის კვეთა $\angle EKC = \alpha + \beta$ ასევე $\angle BID = \alpha + \beta$ ე.ი. $BIKD$ ჩაიხაზება.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15	25.04.2015/ მათ/III/ 613

ამოცანა № 1   გვერდი № 2(2)



შემოვხაზოთ BIKD წრეწირი და ავიღოთ GD-ს კვეთა H' ანუ BHIKD ციკლურია.

რადგან ციკლურია $\angle BH'D = \alpha+\beta$ და $\angle H'BE = \angle H'DI$.

რომ დავამტკიცოთ $\angle GEI = \angle IBC \Rightarrow BC \parallel GE \parallel IF$ გამოდის,

რომ $\breve{GB} = \breve{EC}$ ე.ი. $\angle GDA = 180 - 3\beta - 2\alpha$ ე.ი. $\angle H'BD = 180 - 2\beta - \alpha$ გამოდის, რომ $\Delta H'BD = \Delta FCD$ რადგან $BD = DC$ $\angle H'BD = \angle FCD$ და $\angle BH'D = \angle CFD$ სამკუთხედების ტოლობიდან კი გამოდის, რომ $H'D = FD$ ასევე $FD = HD$ ე.ი. $H' = H$ ე.ი. $\angle BHD = \alpha + \beta$ ე.ი. HB არის მხები ΔHDF-ზე შემოხაზული წრეწირის

რ. დ. გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

25.04.2015/ მათ/III/ 613

ამოცანა № 2

გვერდი № 1(2)

$f:(0;1) \to (0;1)$

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & \text{თუ } 0<x<\frac{1}{2} \to \text{I ოპერაცია} \\ x^2 & \text{თუ } \frac{1}{2}<x<1 \to \text{II ოპერაცია.} \end{cases}$$

ცხადია I ოპერაციის დროს $f(x)>x$ ხოლო II ოპერაციის დროს $f(x)<x$ რადგან $x<1$. ჩვენ გვინდა, რომ ვიპოვოთ $(a_n-a_{n-1})(b_n-b_{n-1})<0$ ანუ $a_n>a_{n-1}$ და $b_n<b_{n-1}$ ან $a_n<a_{n-1}$ და $b_n>b_{n-1}$ ანუ n-ი ოპერაციის დროს ერთ მიმდევრობაში უნდა ჩავატაროთ I ოპერაცია და მეორეში II.

ახლა დავუშვათ საწინააღმდეგო $(a_n-a_{n-1})(b_n-b_{n-1})>0$ ესე ი.ი. ორივე მიმდევრობაში ვატარებთ ერთი და იმავე ოპერაციას. ვთქვათ, რომ II ოპერაციას უსასრულოდ ბევრჯერ ჩავატარებთ, იქნები ერთ-ერთი II ოპერაცია ჩავატარეთ a_i და b_i იქნები სხვაობა $(a_i<b_i)$ იყო d_i $b_i-a_i=d_i$ მაშინ II ოპერაციის ჩატარების მერე სხვაობა ხდება $2a_id_i+d_i^2$ ეს ნიშნავს რომ $d_i\cdot(2a_i+d_i)$. $2a_i+d>1$ რადგან $2a_i>1$ ეს ნიშნავს, რომ a_i-ს უტარდება II ოპერაცია. ანუ II ოპერაციის დროს სხვაობა a_i და b_i-ს შორის ყოველთვის იზრდება 1-ზე მეტ რიცხვზე. ხოლო ცხადია I ოპერაციის დროს სხვაობა საერთოდ არ იცვლება. თუ ავიღებ სხვაობა

იყო ხოლოს k მაშინ n-ური რიცხვები II ოპერაციის შემდეგ ის k გაიზრდება მინიმუმ 2^n-ურ ხოლოს 2 არის 1-ზე დიდი რა გვინდა მაგრამ რიცხვი. და ცხადია რომ 2^n-ეკსპონენტად დიდი რიცხვის რადგან რ არის ეკსპონენტად დიდი რიცხვი. ეს კი იმიტომ, რომ II ოპერაცია ეკსპონენტად ზრდის ნაწილს. ე.ი. სწორია ~~...~~ შემდეგი ვხედავ ნებისმიერი რიცხვი, მათ შორის $\frac{1}{2}$-ის ტოლი თუ $b_i - a_i = \frac{1}{2}$ მაშინ ცხადია $b_i \in (\frac{1}{2}; 1)$ და $a_i \in (0, \frac{1}{2})$ ანუ $(i+1)$-ე ოპერაციაზე b_i-ს ვაკეთებთ II ოპერაციას და a_i-ზე I. ე.ი. $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$ არსებობს ასეთი n.

რ. დ. გ.

P.S. 2-ის მინიმუმის რაც შევამჩნიე დავაფიქსირო, რადგან აუცილებელია $(2a_i+k)$-ური რაც მეტია ან ტოლი $1+k$-ზე, შემდეგში იზრდება ყველა $(2a_t+t)$-ური რაც მეტია $(1+t)$ და t აიღეთ k-ზე მეტი რადგან $t = k(2a_i+k)$ და ყველა რიცხვი $(1+k)$ ზედა რა ხარისხში უნდა ავიყვანოთ, რომ სწორია $\frac{1}{2}$-ზე დიდი ვხედავს.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15	25.04.2015/ მათ/III/ 613
ამოცანა № 3	გვერდი № 1

$7x^2-13xy+7y^2=(|x-y|+1)^3 \Longleftrightarrow (\sqrt{7}x-\sqrt{7}y)^2+xy=(|x-y|+1)^3$

თუ x და y ლუწებია მაშინ მარცხენა მხარე ლუწია მარჯვენა კი კენტი

თუ x ლუწია y კენტი მაშინ მარცხენა მხარე კენტია მარჯვენა ლუწი

ე.ი. x და y კენტია. $x=1$ და $y=1$ აკმაყოფილებს.

ვთქვათ $x>y$ $x=y+\delta$ ჩავსვათ

$$7(y+\delta)^2-13(y+\delta)y+7\cdot y^2=(\delta+1)^3$$

$$7y^2+7\delta^2+14y\delta-13y\delta-13y^2+7y^2=(\delta+1)^3$$

$$y^2+7\delta^2+y\delta=(\delta+1)^3$$

$$y^2+y\delta+7\delta^2-(\delta+1)^3=0$$

$$D=\delta^2-28\delta^2+4(\delta+1)^3=-27\delta^2+4(\delta+1)^3$$

$$y=\frac{-\delta\pm\sqrt{D}}{2}$$